et on sait que :

- $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BI}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}$ $[\pi]$

  car (BI) bissectrice intérieure de [BC; BA].

- $\widehat{\left(\overrightarrow{CI};\overrightarrow{CB}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}$ $[\pi]$

  car (CI) bissectrice intérieure de [CB; CA].

D'où $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)}$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\widehat{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\right]$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)}\right]$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA}\right)}$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\pi + \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)}\right]$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \pi - \frac{1}{2}\left[\pi + \frac{-\pi}{3}\right]$ $[\pi] \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ ou $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} + \pi$ $[2\pi]$

$\equiv \frac{-\pi}{3}$ $[2\pi]$ (impossible)

Conclusion : $\widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$.

c- $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IB}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}\right)}$ $[2\pi]$.

Or $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IB}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ car f(P) = B et f d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

aussi $\widehat{\left(\overrightarrow{IC};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi]$ car f(C) = Q.

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IQ}\right)} \equiv \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$ $[2\pi] \equiv 0$ $[2\pi]$

$\Rightarrow$ les points I, P et Q sont alignés.

3/a- f est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow$ f ∘ f ∘ f est un déplacement d'angle $\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3} \equiv 0$ $[2\pi]$

de plus f ∘ f ∘ f(I) = I

Bilan :

f ∘ f ∘ f = Id_P. (car elle est un déplacement d'angle nul qui fixe un point).